Die

Derivationscurve der Cycloide.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

Emil Rehfeld
aus Ruhrort a. Rh.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1884.

Sei die Gleichung einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Curve gegeben durch:

$$y_1 = f(x).$$

Zieht man zu jeder Tangente dieser Curve durch einen festen Punkt: K, gegeben durch die Coordinaten (o, k), die Parallele, so schneidet dieses Strahlenbüschel auf der positiven resp. negativen Ordinatenachse bestimmte Strecken ab. Werden diese Abschnitte, vom Anfangspunkte aus gerechnet, auf die Ordinaten der entsprechenden Berührunpspunkte abgetragen und zwar vom Fusspunkte aus unter Berücksichtigung des Vorzeichens, so bestimmen die Endpunkte dieser Abschnitte in unmittelbarer Aufeinanderfolge eine Curve, welche die Fluxions- oder Derivationscurve der gegebenen genannt werden kann (Fig. I).

Aus der Entstehungsweise der Derivationscurve geht hervor, dass für jede Ordinate derselben:

$$y : k = dy_1 : dx = f'(x)$$

ist, die Gleichung derselben wird demnach sein:

(1) ..... $$y = k f'(x).$$

Aus (1) folgt:

α) Hat die gegebene Curve für eine bestimmte Abscisse einen Culminationspunkt, so liegt der entsprechende Beugungspunkt der Derivationscurve im Fusspunkte der zugehörigen Ordinate, in der x-Achse.

β) Besitzt die gegebene Curve für eine bestimmte Abscisse einen Beugungspunkt, so hat die Derivationscurve für die nämliche Abscisse einen Culminationspunkt.

γ) Einem Rückkehrpunkte der Hauptcurve entspricht ein Punkt der Derivationscurve, für welchen die Tangente zur Abscissenachse senkrecht steht.

δ) Ein Doppelpunkt der Hauptcurve liefert bei gleicher Abscisse zwei verschiedene Punkte der Derivationscurve.

ε) Einem Punkte der Hauptcurve, für welchen die Tangente der Ordinatenachse parallel läuft, entsprechen die beiden unendlich fernen Punkte dieser Tangente.

In dem Folgenden soll die Derivationscurve der Cycloide näher betrachtet werden.

§. 1. Gleichung und Gestalt der Derivationscurve der Cycloide.

1) Bekanntlich ist die Cycloide der geometrische Ort des Punktes M eines Kreises, der auf einer Geraden rollt.

Wir lassen den Kreis: $r = a$: auf der Y-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems rollen, und nehmen an, dass sich der Punkt M beim Anfang der Bewegung in der X-Achse, in der Entfernung: $x = 2a$ vom Ursprung befinde. Es ist dann ersichtlich, dass für die Ordinatenwerthe: $\pm\pi a$, $\pm 3\pi a$, $\pm 5\pi a$... die Curve die Y-Achse erreicht und für die Werthe: 0, $\pm 2\pi a$, $\pm 4\pi a$ .... die zugehörigen Abscissen ein Maximum: $2a$ haben. Jeder vollständigen Kreisumdrehung entspricht ein Curvenzweig und alle diese Bögen sind unter sich congruent (Fig. II). Habe Punkt M die Coordinaten x, y und sei Winkel $IRM = PRL = \alpha$, so ist:

$$(2)\ldots \begin{cases} x = PR + RI = a + a\cos\alpha \\ y = OP + IM = arc.\,LP + IM = a\,(\alpha + \sin\alpha) \end{cases}$$

Beide Gleichungen bestimmen den Lauf der Cycloide. Die Elimination von α giebt der Gleichung der Cycloide die Gestalt:

$$(2^a)\ldots \qquad y = a\,arc\cos\frac{x-a}{a} \pm \sqrt{2ax - x^2}$$

Die Gleichung der Derivationscurve der Cycloide wird nach (1) gegeben sein durch:

$$(3) \ldots \quad y = \pm \frac{k x}{\sqrt{2 a x - x^2}}$$

oder:

$$(3^a) \ldots \quad F = x y^2 - 2 a y^2 + k^2 x = 0.$$

2) Die Derivationscurve liegt symmetrisch zur X-Achse zwischen den Geraden $x = 0$ und $x = 2a$, hat die Gerade $x = 0$ zur Tangente und die Gerade $x = 2a$ zur Asymptote (Fig. III).

Doppelpunkte hat die Derivationscurve nicht, denn das System der drei Gleichungen:

$$F = 0, \ \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

hat keine gemeinsame Wurzeln. Die Derivationscurve besitzt aber Beugungspunkte und diese werden wohl am einfachsten gefunden aus den Schnittpunkten der beiden Curven: $F = 0$ und $\Delta = 0$, wenn

$$C.\ \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0$$

C gleich constant und die Gleichung der Derivationscurve in der homogenen Form:

$$F = x y^2 - 2 a y^2 z + k^2 x z^2 = 0$$

vorliegt.

Aus der Betrachtung der auf Cartesische Coordinaten reducirten Form der sogenannten Hessischen Curve:

$$(4) \ldots \quad \begin{array}{l} \Delta = x y^2 + 4 a y^2 + k^2 x - 2 a k^2 = 0 \\ \text{und } F = x y^2 - 2 a y^2 + k^2 x = 0 \end{array}$$

findet man die reellen Wurzeln für das System beider Gleichungen:

(5) ... $$x = \frac{a}{2}, \; y = \pm k \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Die Coordinaten der Wendepunkte der Derivationscurve werden mithin durch (5) angegeben.

Um auf Concavität resp. Convexität der Derivationscurve schliessen zu können, bilde man den zweiten Differentialquotienten nach x, welcher nach einigen Umformungen sich darstellt als:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = y^5 \frac{(2ax - a^2)}{k^4 \, x^4},$$

woraus zu schliessen ist, dass die Derivationscurve vom Anfang bis zu einem Punkte, der der Abscisse $x = \frac{a}{2}$ entspricht, der X-Achse die concave Seite zukehrt, sich hier beugt und in ihrem weiteren Verlauf zur Ordinatenaxe concav liegt.

3) Aus den Gleichungen (3) und (3ª) folgt:

α) Jede Sehne der Derivationscurve senkrecht zur Abscissenachse wird von dieser halbirt.

Die im Punkte $x = a$ errichtete Ordinate ist gleich k.

β) Werden die Punkte $(x y_1)$ der Cycloide und $(x y)$ der Derivationscurve entsprechende Punkte genannt, so besteht die Relation:

(6) .... $$y y_1 = k. \, Sn(x).$$

d. h: Die Rechtecke gebildet aus den Ordinaten entsprechender Punkte, verhalten sich wie die Subnormalen zur X-Achse des Cycloidenpunktes.

γ) Aus der Gleichung:

(7) .... $$x y = k. \, St(y)$$

folgt: Die Rechtecke aus den Coordinaten eines Punktes der Derivationscurve verhalten sich wie die Subtangenten des entsprechenden Cycloidenpunktes in Bezug auf die Y-Achse.

Die Relationen (6) und (7) erlauben auf einfache Weise eine punktuelle Construction der Derivationscurve.

4) Verschiebt man die Cycloide längs der Y-Achse um die Strecke c, so bleibt die Gestalt, Lage und die analytische Form

der Derivationscurve erhalten. Bei einer Verschiebung der Cycloide längs der X-Achse wird die Derivationscurve um eine gleiche Strecke in derselben Richtung verschoben, ihre Gestalt bleibt unverändert.

§. 2. Ordnung und Klasse der Derivationscurve.

1) Die Gleichung der geraden Linie werde durch:

(8) ..... $$y = tx + s$$

angegeben. Die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Derivationscurve müssen beiden Gleichungen genügen, d. h. gemeinsame Wurzeln derselben sein.

Die Elimination von y resp. x aus den Gleichungen (3^a) und (8) führt zu den in x resp. y cubischen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} (9^a) & x^3 + 2\frac{(s-at)}{t}x^2 + \frac{s^2+k^2-4ats}{t^2}x - \frac{2as^2}{t^2} = 0 \\ (9^b) & y^3 - (s+2at)y^2 + k^2 y - k^2 s = 0 \end{array}\right\}$$

Die Derivationscurve wird hiernach von einer Geraden höchstens in drei Punkten geschnitten, d. h. sie ist von der dritten Ordnung.

Zur Bestimmung der Coordinaten der Durchschnittspunkte reduciren wir die Gleichung (9^a) durch:

$$x = z - \frac{2(s-at)}{3t}$$

und gelangen zu der reducirten Form:

(10) .... $$z^3 - \delta z + \alpha(\delta - \alpha^2) - \gamma = 0$$

wenn zur Abkürzung:

$$\delta = \frac{4(s-at)^2}{3t^2} - \frac{s^2+k^2-4ats}{t^2}$$

$$\alpha = \frac{2(s-at)}{3t} \text{ und } \gamma = \frac{2as^2}{t^2}$$

gesetzt wird.

Aus der Gleichung (10) folgt:

A) Die Gerade (8) schneidet die Derivationscurve nur in einem Punkte, wenn:

$\alpha)$ $\delta = 0$,

$\beta)$ $\delta < 0$

$\gamma)$ $\delta > 0$ aber $\frac{1}{4}\left\{\alpha(\delta-\alpha^2)-\gamma\right\}^2 > \frac{1}{27}\,\delta^3$.

B) $Ist\ \frac{1}{4}\left\{\alpha(\delta-\alpha^2)-\gamma\right\}^2 - \frac{1}{27}\,\delta^3 = R = 0$

und $\delta > 0$

so besitzt die Gleichung (10) drei reelle Wurzeln, von welchen zwei gleich sind. $R = 0$ ist also Bedingung dafür, dass (8) Tangente der Derivationscurve ist. Neben diesen beiden gleichen Wurzeln existirt noch eine dritte reelle Wurzel. Wir haben hiernach den Satz:

Jede Gerade, welche die Derivationscurve berührt, schneidet sie ausserdem noch in einem weiteren Punkte, dem Tangentialpunkte des Berührungspunktes.

C) Werden von den Coefficienten der Gleichung (10) die Bedingungen $\delta > 0$, $R < 0$ erfüllt, so schneidet die Gerade (8) die Derivationscurve in drei Punkten.

2) Für $t = 0$ geht (9^a) über in:

$$x = \frac{2as^2}{s^2 + k^2}$$

d. h.: Jede Gerade $y = s$, parallel der X-Achse schneidet die Derivationscurve nur in einem Punkte.

Ist $s = 0$, so degenerirt (9^a) zu:

$$x^2 - 2ax + \frac{k^2}{t^2} = 0$$

einer Gleichung zweiten Grades, welche für

$$t = \pm\frac{k}{a}$$

gleiche Wurzeln hat; d. h.:

Die Gerade durch den Coordinatenanfang, welche mit der positiven X-Achse einen Winkel bildet, dessen Tangente: $t = \pm\frac{k}{a}$ ist, berührt die Derivationscurve in einem Punkte,

der die Coordinaten: $x = a$, $y = \pm k$ hat. Für $k = a$ ist der Neigungswinkel der Geraden gegen die Abscissenachse 45 Grad.

3) Mögen in der Gleichung der Derivationscurve:

$$F = xy^2 - 2ay^2 + k^2 x = 0$$

a und k alle möglichen Werthe durchlaufen, jedoch so, dass der Quotient: $\frac{k}{a}$ einer Constanten: t gleichbleibt, so stellt obige Gleichung ein System von Derivationscurven der Cycloide dar, die alle im Anfang von der Ordinatenachse tangirt werden und symmetrisch zur Abscissenachse liegen.

Denkt man sich vom Anfang aus an eine Curve dieses Systems die beiden Tangenten gezogen, so berühren diese alle Curven des Systems; es sind diese Geraden gemeinschaftliche Tangenten sämmtlicher Curven des Systems. In den Ebenenausschnitt, den beide Tangenten mit der positiven X-Achse bilden, greift keine Curve des Systems über, sie liegen mit ihren sämmtlichen Punkten zwischen diesen Tangenten und der Y-Achse.

4) Zieht man von einem Punkte $(x_1\, y_1)$ aus eine Tangente an die Derivationscurve, so sind die Coordinaten des Berührungspunktes ein Wurzelpaar der gemeinsamen Wurzeln des Systems:

$$(11^a) \quad \begin{cases} xy^2 - 2ay^2 + k^2 x = 0 \\ x(x-2a)(y-y_1) + ay(x-x_1) = 0 \end{cases}$$

Die Elimination von y führt zu der Gleichung:

$$(12^a) \quad (k^2+y_1^2)x^4 - 2a(k^2+3y_1^2)x^3 + a(ak^2 - 2k^2x_1 + 12ay_1^2)x^2 + 2a^2(k^2x_1 - 4ay_1^2)x + a^2k^2x_1^2 = 0.$$

Zur Elimination von x wendet man besser das mit (11^a) aequivalente System:

$$(11^b) \quad \begin{cases} xy^2 - 2ay^2 + k^2 x = 0 \\ 2y(x-2a)(y-y_1) + (y^2+k^2)(x-x_1) = 0 \end{cases}$$

an; man erhält die Eliminationsgleichung:

$$(12^b) \quad y^4(2a-x_1) - 2k^2(a+x_1)y^2 + 4ak^2y_1y - k^4x_1 = 0$$

Aus (12^a) und (12^b) folgt:

α) Von einem Punkte: $(x_1 y_1)$ lassen sich im allgemeinen vier Tangenten an die Derivationscurve ziehen, d. h. sie ist von der vierten Klasse.

β) Zieht man von einem Punkte alle möglichen Tangenten an die Derivationscurve, so ist die algebraische Summe der Ordinaten der Berührungspunkte gleich Null.

5) Wird $y_1 = 0$ und $x_1 = 0$ gesetzt, so erhalten wir das bekannte Resultat:

Vom Anfangspunkte lassen sich drei Tangenten: $x = 0$; $y = \frac{k}{a} x$; $y = -\frac{k}{a} x$ an die Derivationscurve ziehen. Wird $x_1 = 0$ gesetzt, so degeneriren (12^a) und (12^b) zu Gleichungen dritten Grades. Von einem Punkte der Y-Achse aus lassen sich mithin höchstens drei Tangenten an die Derivationscurve legen. Liegt der Punkt: (x_1, y_1) auf der X-Achse, ist also: $y_1 = 0$, so bleibt der Grad der Eliminationsgleichungen erhalten. Von einem Punkte der X-Achse aus können demnach im allgemeinen vier Tangenten gezogen werden.

6) Aus der Form der Eliminationsgleichung (9^b), welche durch die Substitution:

$$y = z + \frac{1}{3}(s + 2at)$$

die Gestalt annimmt:

$$(13) \ldots\ z^3 + \left\{k^2 - \frac{1}{3}(s+2at)^2\right\} z + \frac{s+2at}{3} k^2 - \frac{2(s+2at)^3}{27} - k^2 s = 0$$

geht hervor, dass, wie §. 2. art. 1 gezeigt wurde, die Gerade:

$$y = tx + s$$

die Derivationscurve tangirt, wenn die Gleichung:

$$(14) \ldots \frac{1}{4}\left[\frac{s+2at}{3} k^2 - \frac{2(s+2at)^3}{27} - k^2 s\right]^2 + \frac{1}{27}\left[k^2 - \frac{1}{3}(s+2at)^2\right]^3 = 0$$

erfüllt ist. Drückt man diese Bedingungsgleichung in Polarcoordinaten aus, indem man:

$$(15) \ldots \qquad t = -\operatorname{cotg} \alpha, \quad s = \frac{\varrho}{\sin \alpha}$$

substituirt*), und lässt alsdann in der neuen Gleichung die Grössen ϱ und α variiren, so entspricht dieser Gleichung der geometrische Ort der Fusspunkte aller Lote, die sich vom Coordinatenanfang auf die Tangenten der Derivationscurve fällen lassen, d. h. wir erhielten in der gedachten Gleichung die Polargleichung einer Fusspunktcurve der Derivationscurve.

Wird die Substitution vorgenommen, so erhält man nach einigen Umformungen die Polargleichung der Fusspunktcurve:

$$(16)\ \ldots\ \varrho^4 - 6a\cos\alpha\,.\,\varrho^3 + 2(k^2\sin^2\alpha + 6a^2\cos^2\alpha)\,\varrho^2 - 2(4a^2\cos^2\alpha - 5k^2\sin^2\alpha)\,a\ .\ \cos\alpha\,.\,\varrho - a^2k^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + k^4\sin^4\alpha = 0.$$

Zur weiteren Betrachtung dieser Curve wird es von Nutzen sein, Cartesische Coordinaten, durch die Substitution:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \cos\alpha = \frac{x}{\varrho}\ ,\ \sin\alpha = \frac{y}{\varrho}$$

einzuführen. Durch diese Einsetzung geht (16) über in:

$$(17)\ldots\begin{cases}(x^2+y^2)^4 - 6ax(x^2+y^2)^3 + 2(x^2+y^2)^2\,(k^2y^2 + 6a^2x^2)\\ -2ax(x^2+y^2)\,(4a^2x^2 - 5k^2y^2) - a^2k^2x^2y^2 + k^4y^4 = 0\end{cases}$$

woraus hervorgeht, dass die Fusspunktcurve eine Curve achter Ordnung ist, welche symmetrisch zur X-Achse liegt.

7) Es kann nicht meine Absicht sein, näher auf diese Fusspunktcurve einzugehen, um uns aber ein annäherndes Bild von der Gestalt derselben zu verschaffen, wollen wir noch kurz die vielfachen Punkte derselben ins Auge fassen. Schon der Umstand, dass vom Coordinatenanfang aus drei Tangenten an die Derivationscurve zu legen sind, welches bedingt, dass die Fusspunkte der Lote vom Anfang auf die Tangenten mit dem Ursprung selbst zusammenfallen müssen, führt uns zu dem Vorhandensein eines mehrfachen Punktes. Um über die Natur desselben näher Aufschluss zu erhalten, führen wir Dreiecks-coordinaten ein, und tragen bei der Einführung dafür Sorge, dass ein Eckpunkt des Fundamentaldreiecks (I, II, III) nämlich:

*) Hierbei ist ϱ senkrecht zur Richtung von: $y = tx + s$ angenommen.

III. mit dem Coordinatenanfang des Cartesischen Coordinatensystems zusammenfällt. Dieses erreichen wir durch die Substitution:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

wo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Gleichungen der Seite: 1, 2, 3 des Fundamentaldreiecks bezeichnen.

Durch die Einführung dieser Substitution nimmt (17) die Form an:

(18) . . . . $v_4 x_3^4 + v_5 x_3^3 + v_6 x_3^2 + v_7 x_3 + v_8 = 0$

Die Grössen v sind homogene Funktionen von x_1 und x_2 und zwar ist:

$$v_4 = k^2 (k^2 x_2^4 - a^2 x_1^2 x_2^2)$$
$$v_5 = -2ax_1 (x_1^2 + x_2^2)(4a^2 x_1^2 - 5k^2 x_2^2)$$
$$v_6 = 2(x_1^2 + x_2^2)(k^2 x_1^2 + 6a^2 x_1^2)$$
$$v_7 = -6ax_1 (x_1^2 + x_2^2)^3$$
$$v_8 = (x_1^2 + x_2^2)^4.$$

Die Form der Gleichung (18) lässt erkennen, dass die Fusspunktcurve in der Ecke: III des Fundamentaldreiecks, resp. im Anfang des rechtwinkligen Coordinatensystems einen vierfachen Punkt besitzt.

Verbindet man nämlich mit der Gleichung (18), die Gleichung irgend einer Geraden durch den Eckpunkt III:

$$x_2 - \mu x_1 = 0$$

so erhält man die Schnittpunkte der Geraden mit der Curve. Substituirt man nun $x_2 = \mu x_1$ in (18), so wird die Gleichung (18) unter der Form:

(19) . . . . $x_3^4 x_1^4 b_4 + x_3^3 x_1^5 b_5 + x_3^2 x_1^6 b_6 + x_3 x_1^7 b_7 + x_1^8 b_8 = 0$

auftreten, wo die Grössen b gleich constant sind, so z. B.

$$b_4 = k^2 \mu^2 (k^2 \mu^2 - a^2) \text{ etc. etc.}$$

Dividirt man (19) mit x_3^8, so liefert:

(20) $b_4 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^4 + b_5 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^5 + b_6 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^6 + b_7 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^7 + b_8 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^8 = 0$

die 8 Werthe von $\frac{x_1}{x_3}$, welche den 8 Schnittpunkten der Geraden: $x_2 - \mu x_1 = 0$ mit der Curve entsprechen. Da aber diese Gleichung achten Grades für die Variabele $\frac{x_1}{x_3}$, des Ausfalles der 0, 1, 2 und 3ten Potenz wegen, vier Wurzeln gleich Null hat, so sind in dem Punkte ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) vier Durchschnitte der Geraden mit der Curve vereinigt. Da aber die Gerade $x_2 - \mu x_1 = 0$ beliebig gewählt war, so schneidet jede Gerade durch den Eckpunkt: III. die Fusspunktcurve in vier zusammenfallenden Punkten, d. h. die Ecke III. ist ein vierfacher Funkt unserer Curve.

Die Tangenten dieses vierfachen Punktes werden, wie durch eine einfache Betrachtung gezeigt werden kann, durch

$$v_4 = k^2 x_2^2 (k^2 x_2^2 - a^2 x_1^2) = 0$$

angegeben. In rechtwinkligen Coordinaten werden die Gleichungen derselben sein:

$$y_{1,2} = 0 \qquad y_{3,4} = \pm \frac{a}{k} x. \qquad \text{d. h.}$$

Der vierfache Punkt ist aus einem Rückkehrpunkte und einem Doppelpunkte gebildet. $y = 0$ ist die Rückkehrtangente und $y = \pm \frac{a}{k} x$ sind die Gleichungen der Tangenten des Doppelpunktes. (Fig. IV).

Die Fusspunktcurve hat noch eine zweite Singularität. Verschiebt man das rechtwinklige Coordinatensystem parallel mit sich selbst, längs der X-Ache und macht den Punkt: $x = 2a$ zum Anfang eines neuen Coordinatensystems, so wird die, der Gleichung (18) nachgebildete Gleichung der Fusspunktcurve für den neuen Ursprung, die Gestalt annehmen:

$$v_2 x_3^6 + v_3 x_3^5 + v_4 x_3^4 + v_5 x_3^3 + v_6 x_3^2 + v_7 x_3 + v_8 = 0$$

weil v_0 nud v_1 den Werth Null haben. Wie die Gleichung zeigt, haben wir im Punkte: $x = 2a$ einen zweifachen Punkt, der speciell ein Rückkehrpunkt ist, weil die Tangenten des

Doppelpunktes, wie aus: $v_2 = 0$ hervorgeht, in eine, nämlich: $y = 0$, zusammenfallen.

Das letztere Resultat geht auch aus der Betrachtung der Schnittpunkte der Abscissenachse mit der Fusspunktcurve hervor. $y = 0$ liefert die Abscissen der Schnittpunkte:

$$x_{1,2,3,4,5} = 0, \quad x_{6,7,8} = 2a.$$

d. h. Die Abscissenachse schneidet im Punkte: $x = 2a$ die Curve in drei Punkten; $y = 0$ ist Rückkehrtangente für die Spitze $x = 2a$.

Für $x = 0$ geht die Gleichung der Curve über in:

$$y^8 + 2k^2y^6 + k^4y^4 = 0$$

d. h. Die Fusspunktcurve schneidet die Y-Achse nur im Coordinatenanfang.

§ 3. Tangente und Normale der Derivationscurve.

1) Die Tangente am Punkte: (xy) der Derivationscurve

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad y = \frac{kx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

hat die Gleichung:

$$(21) \quad \ldots \ldots \quad y - Y = \frac{akx}{(2ax - x^2)^{3/2}}(x - X)$$

$$(21^a) \quad \ldots \ldots \quad \text{oder:} \quad Y = \frac{ak\left(xX + x^2 - \frac{x^3}{a}\right)}{(2ax - x^2)^{3/2}}$$

Da für

$$Y = 0$$

$$X = \frac{x^2}{2} - x$$

ist, so schneidet die Tangente, deren Berührungspunkt die Coordinaten: (x, y) hat, die X-Achse in einem Punkte, dessen Entfernung vom Ursprung gleich: $\frac{x^2}{a} - x$ ist.

Hieraus folgt eine einfache Construction der Tangente an einem Punkte: (x, y) der Derivationscurve. Man construirt nämlich die mittlere Proportionale von x und a, vermindert dieselbe um die Länge der Abscisse des gegebenen Punktes und trägt diese Streckendifferenz vom Coordinatenanfang auf die X-Achse ab. Die Verbindungslinie des freien Endpunktes der Streckendifferenz mit dem gegebenen Punkte ist die Tangente.

Der Punkt, in welchem die Tangente die X-Achse durchschneidet, hat nach oben die Coordinaten: $\left(\frac{x^2}{a} - x, 0\right)$ d. h. seine Abscisse ist unabhängig von k. Betrachtet man nun k als variabel, so stellt:

$$F = xy^2 - 2ay^2 + k^2x = 0$$

ein System von Derivationscurven dar, für welches der Satz gilt: Alle Tangenten des Systems der Derivationscurven, welches bei variabelem k durch:

$$xy^2 - 2ay^2 + k^2x = 0$$

dargestellt ist, deren Berührungspunkte in einer Parallelen zur Ordinatenachse liegen, laufen durch denselben Punkt der X-Achse.

2) Die Tangente im Punkte: (x, y) wird unter Umständen die Derivationscurve in einem zweiten Punkte schneiden. Um die Coordinaten dieses Tangentialpunktes zu erhalten, setze man:

$$Y = \frac{k \cdot X}{\sqrt{2aX - X^2}}$$

in die Gleichung der Tangente, in (21) ein. Die Substitution liefert die in: X cubische Gleichung:

$$X^3 - \frac{2}{a}(x^3 - ax + a^2)X^2 + \frac{x}{a}(4x^2 - ax + 4a^2)X - \frac{2x^2}{a}(x-a)^2 = 0$$

welche die Wurzeln hat:

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad X_{1,2} = x, \quad X_3 = \frac{2}{a}(x-a)^2.$$

Hieraus folgt:

Die Abscisse des Tangentialpunktes ist mittlere Proportionale zwischen $(x-a)$ und $\frac{a}{2}$.

Ist speciell die Abscisse des Berührungspunktes gleich a, so zeigt:

$$X_3 = \frac{2}{a}(x-a)^2$$

dass die Abscisse des Tangentialpunktes gleich Null ist. Da aber für:

$$X_3 = 0, \; x = a$$

die zugehörige Ordinate des Tangentialpunktes ebenfalls:

$$Y_3 = 0$$

ist, so gilt der Satz:

Die Tangenten in den Punkten: $(x = a, \; y = \pm k)$ schneiden sich im Coordinatenanfang.

Für $k = a$ stehen diese Tangenten im Anfangspunkte auf einander senkrecht. Hat die Abscisse des Berührungspunktes den Werth:

$$x = 2a$$

so ist die des Tangentialpunktes ebenfalls gleich $2a$. Die Tangente ist in diesem Falle Asymptote, ihr Tangentialpunkt liegt im Unendlichen.

Aus: $$X_3 = \frac{2}{a}(x-a)^2$$

ersieht man die Unabhängigkeit der Abscisse des Tangentialpunktes von k, woraus folgt:

Der geometrische Ort der Tangentialpunkte sämmtlicher Tangenten des Systems der Derivationscurven:

$$xy^2 - 2ay^2 + k^2x = 0$$

für variabele k, deren Berührungspunkte in einer Parallelen zur Y-Achse liegen, ist eine zweite Gerade, welche ebenfalls parallel der Ordinatenachse verläuft.

3) Zwei Tangenten der Derivationscurve, deren Berührungspunkte die Coordinaten haben: $(x_1 y_1)$ und: $(x_2 y_2)$ stehen auf einander senkrecht, wenn $x_1\, y_1\, x_2\, y_2$ der Gleichung:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{a^2 k^2 x_1 x_2}{(2ax_1 - x_1^2)^{3/2}\,(2ax_2 - x_2^2)^{3/2}} = 0 \\ \text{oder:} \quad x_1 x_2 (2a - x_1)^3 (2a - x_2)^3 = a^4 k^4 \end{array} \right.$$

genügen.

Die Tangenten an entsprechenden Punkten der Cycloide und ihrer Derivationscurve bilden einen Winkel, dessen Tangente ist:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} & tg\Theta = \dfrac{x(2ax - x^2)^{3/2} - akx(2ax - x^2)^{1/2}}{(2ax - x^2)^2 + akx^2} \\ \text{oder:} & = \dfrac{x(2ax - x^2)^{1/2}\,\{(2ax - x^2) - ak\}}{(2ax - x^2)^2 + akx^2} \end{array} \right.$$

Aus (24) folgt:

α) Für jede Abscisse, welche Wurzel ist einer der beiden Gleichungen:

$$2a - x = 0$$
$$(2ax - x^2) - ak = 0$$

sind die Tangenten an entsprechenden Punkten der Cycloide und der Derivationscurve parallel. Speciell fällt die Scheiteltangente der Cycloide mit der Asymptote der Derivationscurve zusammen.

β) Construirt man in den vier Punkten, in welchen, die zur Ordinatenachse parallele Gerade:

$$x = a + \sqrt{a(a - k)}$$

die Cycloide und ihre Derivationscurve schneidet, Tangenten, so schliessen dieselben einen Rhombus ein.

γ) Für die Werthe der Abscisse: x, die die Gleichung:

$$(2a - x)^2 + ak = 0$$

befriedigen, stehen die Tangenten an den entsprechenden Punkten auf einander senkrecht.

4) Die Gleichung der Normale im Punkte: (x, y) der Derivationscurve wird angegeben durch:

$$(25) \quad \ldots\ldots \quad y - Y = -\frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{akx}(x - X)$$

oder durch:

$$y - Y = -\frac{2y(2a - x)}{k^2 + y^2}(x - X)$$

Setzt man in der Gleichung (25), $Y = 0$, so erhält man:

$$X = x + \frac{ak^3}{(2a - x)^2}$$

Die Normale im Punkte: (x, y) durchschneidet also die Abscissenachse in einer Entfernung:

$$x + \frac{ak^3}{(2a - x)^2}$$

vom Anfangspunkte.

Genügen die laufenden Coordinaten (X, Y) die Gleichung der Derivationscurve:

$$Y = \frac{kX}{\sqrt{2aX - X^2}}$$

so führt eine Elimination von Y aus der letzten Gleichung und (25), nach einigen Umformungen zu der in X cubischen Gleichung:

$$(26) \quad \ldots\ldots \quad (x - X)(X^3 - 2AX + B) = 0$$

Die Grössen A und B haben hierin die Werthe:

$$A = \frac{2ak^2 + (2a + x)(2a - x)^2}{2(2a - x)^2}$$

$$B = 2\,\frac{ax(2ax - x^2)^4 + 2a^2k^2x^2(2ax - x^2)^2 + a^3k^4x^3}{(2ax - x^2)^4}.$$

Eine einfache Betrachtung der Gleichung (26) führt zu folgenden Sätzen:

α) Die Normale im Punkte: (x, y) schneidet im allgemeinen die Derivationscurve in zwei weiteren Punkten.

Diese Durchschnittspunkte sind reell, so lange:

$$A^3 > B \quad \text{ist.}$$

β) Die Normale im Punkte: (x, y) berührt in einem zweiten Punkte die Derivationscurve, wenn:

$$A^3 = B$$

γ) Für: $A^3 < B$

endlich schneidet die Normale die Curve in keinem weiteren Punkte.

5) Ertheilt man in der Gleichung der Derivationscurve der Grösse a alle möglichen Werthe und construirt zu jedem Werthe von a die zugehörige Curve, so repräsentirt:

$$xy^3 - 2ay^2 + k^2x = 0$$

ein ganzes System von Derivationscurven: (Dc_3), welche die Y-Achse im Anfang berühren und sich symmetrisch zur Abscissenachse erstrecken. Will man zu diesem System: (Dc_3) die Orthogonalcurve bestimmen, so muss die Thatsache uns zur Gleichung derselben führen, dass die Normale in einem Punkte einer Curve des Systems: (Dc_3), zugleich Tangente der Orthogonalcurve ist.

Habe irgend ein Punkt der Orthogonalcurve, in welchem diese irgend eine Curve des Systems: (Dc_3) unter rechtem Winkel schneidet, die Coordinaten: (x, y), so hat die Normale der Derivationscurve für diesen Punkt die Richtungsconstante:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y(2a - x)}{y^2 + k^2}$$

Da aber diese Normale auch Tangente der Orthogonalcurve im Punkte: (x, y) sein muss, so wird für die Tajectorie die Relation bestehen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y(2a - x)}{y^2 + k^2}$$

oder $$2y(2a - x)\,dx + (y^2 + k^2)\,dy = 0$$

Die Elimination der veränderlichen Grösse: a aus dieser letzten

Gleichung und (3'), führt zu der Differentialgleichung einer Orthogonalcurve:

$$2k^2x\,dx + y(y^2 + k^2)\,dy = 0$$

deren Integration:

(27) . . . . . $y^4 + 2k^2(y^2 + 2x^2) = C$

die Gleichung einer Curve liefert, die sämmtliche Derivationscurven des Systems: (Dc_a) unter rechtem Winkel schneidet.

Selbstverständlich stehen der Integrationsconstanten: C alle möglichen Werthe zu. Der Gleichung (27) entspricht demnach eine ganze Schaar von Curven: (Oc_a), welche sämmtlich Orthogonalcurven des Systems: (Dc_a) sind.

Das Werthsystem für die Grösse: C ist aber doch in so weit eingeschränkt, als C nur zwischen 0 und $+\infty$ variiren kann. Negative Werthe kann C nicht annehmen, wenn anders der Gleichung (27) eine reelle Curve entsprechen soll. Für $C=0$ fällt die Orthogonalcurve mit dem Coordinatenanfang zusammen, weil C nur für $x=y=0$ selbst den Werth Null annehmen kann.

Die Orthogonalcurven breiten sich symmetrisch zur Abscissenachse aus, weil nach (27)

$$x = \pm\frac{1}{2k}\sqrt{C - y^2(y^2 + 2k^2)}$$

und schneiden die Coordinatenachsen unter rechten Winkeln, denn auch diese gehören für die Werthe:

$$a = 0 \text{ und } a = \infty$$

zu dem System der Derivationscurven: (Dc_a).

Die Culminationspunkte sämmtlicher Curven: (Oc_a) liegen auf der Geraden

$$x = 0$$

wie dieses aus der Gleichung (27) und ihrem ersten Differentialquotienten hervorgeht.

6) Bei variabelem: k bezeichnet:

$$xy^2 - 2ay^2 + k^2x = 0$$

ein System von Derivationscurven der Cycloide: (Dc_k), welches sich zwischen den Geraden: $x = 0$ und $x = 2a$ symmetrisch zur Abscissenachse erstreckt, die Ordinatenachse zur Tangente und die Gerade: $x = 2a$ zur gemeinsamen Asymptote hat.

Die Elimination von k aus:

$$2y(2a - x)\,dx + (y^2 + k^2)\,dy = 0$$
$$xy^2 - 2ay^2 + k^2 x = 0$$

führt zu der Differentialgleichung:

$$x(2a - x)\,dx + ay\,dy = 0$$

welche einer Curve zukommt, die alle Curven des Systems: (Dc_k) rechtwinklig schneidet. Die Integration der Differentialgleichung ergiebt:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{c} 2x^3 - 6ax^2 - 3ay^2 = C \\ \text{oder } y = \pm \sqrt{\dfrac{2x^3 - 6ax^2 - C}{3a}} \end{array} \right.$$

eine Gleichung, welche, da C als Integrationsconstante alle möglichen Werthe annehmen darf, einem System von Curven: (Oc_k) entspricht, das sämmtliche Curven von: (Dc_k) unter rechtem Winkel durchschneidet.

Die Curven des Systems: (Oc_k) breiten sich symmetrisch zur Y-Achse aus, ihre Culminationspunkte liegen auf den Geraden:

$$x = 0 \text{ und } x = 2a$$

Für $C = 0$ fällt die Trajectorie mit den Coordinatenanfang zusammen.

§ 4. Durchmesser der Derivationscurve.

1) Ein Curve n^{ter} Ordnung wird von einer Geraden in n Punkten geschnitten. Auf der Geraden lässt sich ein Punkt bestimmen, für den die Summe der Abstände von den n Schnittpunkten, von ihm selbst aus gemessen, verschwindet. Man

nennt diesen Punkt das Centrum der mittleren Entfernungen der n Schnittpunkte. Bestimmt man dieses Centrum auf jeder Geraden eines Systems paralleler Transversalen, so bilden die aufeinanderfolgenden Centra eine bestimmte Curve, welche der Durchmesser 1ter Ordnung der Curve n^{ter} Ordnung genannt wird, conjugirt zu der Richtung der Transversalen. In gleicher Weise lässt sich auf einer Transvalen ein Punkt finden, für den die Summe der Combinationen 2ter Klasse aus den obigen n Abständen verschwindet. Der geometrische Ort dieser Punkte, für ein System paralleler Transversalen, heisst der Durchmesser 2ter Ordnung der Curve n^{ter} Ordnung. Man redet ebenso bei Curven n^{ter} Ordnung von Durchmessern 3ter, 4ter . . . . bis $(n-1)^{ter}$ Ordnung.

2) Zur Betrachtung der Durchmesser unserer Derivationscurve von der dritten Ordnung, nehmen wir zuerst eine geeignete Coordinatentransformation vor.

Eine Gerade: $L=0$, welche die X-Achse unter einem Winkel: φ schneiden möge, besitze ihr Centrum der mittleren Entfernungen in dem Punkte: $(x_1\ y_1)$. Es wird nun für die anzustellende Untersuchung von Nutzen sein, den Coordinatenanfang nach diesem Punkt zu verlegen. Habe nun ein Punkt: $(x,\ y)$ der Derivationscurve, bei paralleler Verschiebung der Achsen nach: $(x_1\ y_1)$ die Coordinaten: $(m,\ n)$, so ist die Gleichung der Derivationscurve für das neue System von der Form:

$$(29)\ \ldots\ldots\ (x_1+m)(y_1+n)^2 - 2a(y_1+n)^2 + k^2(x_1+m) = 0$$

Durch die Einführung von Polarcoordinaten, mittelst der Substitution:

$$m = \varrho\cos\varphi\,;\quad n = \varrho\sin\varphi$$

geht (29) über in:

$$(30)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \varrho^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ +\varrho^2(x_1\sin^2\varphi + 2y_1\sin\varphi\cos\varphi - 2a\sin^2\varphi) \\ +\varrho(2x_1y_1\sin\varphi + y_1^2\cos\varphi - 4ay_1\sin\varphi + k^2\cos\varphi) \\ +x_1y_1^2 - 2ay_1^2 + k^2x_1 = 0. \end{cases}$$

Die Form dieser Gleichung wird wohl für den augenblicklichen Zweck die geeignetste sein. Denn da die Wurzeln dieser Gleichung die Abstände der drei Durchschnittspunkte der Geraden: $L=0$ mit der Derivationscurve, vom Anfange: $(x_1\ y_1)$ bezeichnen, welcher zugleich, der Annahme gemäss, Centrum der mittleren Entfernungen sein soll, so werden die Coefficienten von: ϱ^2 und: ϱ gleich Null gesetzt, die Gleichungen der Durchmesser der ersten und zweiten Ordnung ergeben.

3) Die Gleichung des Durchmessers der ersten Ordnung wird mithin angegeben durch:

$$(31)\ \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{x_1}{2a} + \dfrac{y_1}{a\,tg\,\varphi} = 1 \\ \text{oder: } y_1 = a\,tg\,\varphi - \dfrac{x_1}{2}\,tg\,\varphi. \end{cases}$$

d. h. der Durchmesser erster Ordnung ist eine Gerade, die auf den Coordinatenachsen: x_1 und y_1 die Strecken $2a$ resp. $a\,.\,tg\,\varphi$ abschneidet, oder eine Gerade, deren Richtungsconstante gleich der negativen halben Richtungsconstante des conjugirten Strahlensystems: $L=0$ ist.

Betrachten wir:

$$\frac{x_1}{2a} + \frac{y_1}{a\,tg\,\varphi} = 1$$

als Transversale, und nennen den Winkel, den diese Gerade mit der positiven X-Axe einschliesst: α, so gehört zu einem System von Transversalen, welches der Geraden (31) parallel ist, der Durchmesser erster Ordnung:

$$x_1\,sin\,\alpha + 2y_1\,cos\,\alpha - 2a\,sin\,\alpha = 0$$

welcher, da (Fig. V):

$$tg\,\alpha = -\,tg\,(180 - \alpha) = -\,\frac{1}{2}\,tg\,\varphi$$

ist, die Form annimmt:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_1}{2a} - \dfrac{y_1}{\frac{a}{2} tg\,\varphi} = 1. \\ \text{oder: } \quad y_1 = \dfrac{x_1}{4} tg\,\varphi - \dfrac{a}{2} tg\,\varphi. \end{array} \right.$$

Nennen wir nun zwei Durchmesser, von denen der eine dem conjugirten Strahlensystem des andern parallel läuft, selbst conjugirt, so sagen die Gleichungen (31) und (32) aus: Conjugirte Durchmesser der ersten Ordnung schneiden sich in dem nämlichen Punkte der Abscissenachse, und die Richtungsconstante des einen conjugirten Durchmessers: (31) ist gleich der negativen halben Richtungsconstanten des andern: (32). Die Durchmesser schliessen einen Winkel ein, dessen Tangente gleich ist,

$$\frac{6\,tg\,\varphi}{8 - tg^2\varphi}.$$

Die Eigenschaft, dass conjugirte Durchmesser durch denselben Punkt der X-Achse gehen, ist eine Specialität eines ganz allgemeinen Satzes. Lässt man nämlich den Neigungswinkel der Geraden: $L = 0$ gegen $y = 0$ variiren von 0 bis 2π, d. h. lässt man das Transversalensystem alle möglichen Lagen gegen die X-Achse einnehmen, so wird der zugehörige Durchmesser stets durch die Gleichung:

$$\frac{x_1}{2a} + \frac{y_1}{a\,tg\,\varphi} = 1$$

repräsentirt werden, woraus der allgemeine Satz folgt:

Sämmtliche Durchmesser der ersten Ordnung der Derivationscurve laufen durch ein und denselben Punkt: $x = 2a$ der Abscissenachse.

4) Die Gleichung des Durchmessers der zweiten Ordnung, der auch wohl Diametralkegelschnitt der Derivationscurve genannt wird, wird angegeben durch:

$$(33) \quad \ldots \quad 2x_1y_1\,sin\,\varphi + y_1^2\,cos\,\varphi - 4ay_1\,sin\,\varphi + k^2\,cos\,\varphi = 0.$$

So lange

$$\sin\varphi > 0$$

$$\text{und } k^2 \cos\varphi \sin^2\varphi \gtrless 0$$

ist, stellt diese Gleichung eine Hyperbel dar, deren Mittelpunkt die Coordinaten hat:

$$\xi = 2a,\ \eta = 0$$

und deren Halbachsen angegeben werden durch:

$$A = k\sqrt{2}\,.\,\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi} + \cos\varphi}}$$

$$B = k\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi} - \cos\varphi}}$$

Wird $k^2 \cos\varphi \sin^2\varphi$ zu Null, welches der Fall sein wird, wenn $\varphi = 0^0$ oder $\varphi = 90^0$ wird, so degenerirt der Kegelschnitt.

Für $\varphi = 90^0$ geht (33) über in:

$$x_1 y_1 - 2a y_1 = 0$$

eine Gleichung, welcher genügt wird durch:

$$y_1 = 0 \text{ und } x_1 = 2a$$

Laufen also die Transversalen der Ordinatenachse parallel, so degenerirt der Kegelschnitt in die Asymptote der Derivationscurve und in die Abscissenachse.

Für Transversale parallel der X-Achse geht der Diametralkegelschnitt über in zwei imaginäre Grade parallel zur Ordinatenachse.

5) Das Product der drei Abschnitte auf $L = 0$, gemessen von: $(x_1\ y_1)$ aus, bis zu den Durchschnittspunkten von $L = 0$ mit der Derivationscurve, ist:

$$(34) \quad \ldots\ldots \quad \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 = -\frac{x_1 y_1^2 - 2a y_1^2 + k^2 x_1}{\cos\varphi \sin^2\varphi}.$$

Zieht man durch $(x_1\ y_1)$ eine zweite Transversale: $L' = 0$, welche mit der X-Achse den Winkel: φ' einschliesst, so besteht

für das Product der betreffenden Abschnitte der analoge Werth:

$$\varrho_1' \varrho_2' \varrho_3' = -\frac{x_1 y_1^2 - 2a y_1^2 + k^2 x_1}{\cos\varphi' \sin^2\varphi'}$$

Es ist mithin:

$$\frac{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}{\varrho_1' \varrho_2' \varrho_3'} = \frac{\cos\varphi' \cdot \sin^2\varphi'}{\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi} = \frac{\sin 2\varphi' \cdot \sin\varphi'}{\sin 2\varphi \cdot \sin\varphi}.$$

d. h. Für zwei Transversalen: $L = 0$, $L' = 0$, die die Derivationscurve in drei Punkten schneiden, ist das Verhältniss der Producte der Abschnitte bei paralleler Verschiebung einer oder beider Transversalen constant, und zwar verhalten sich die Producte umgekehrt wie die Rechtecke aus dem doppelten und einfachen Neigungswinkel der Transversalen gegen die Abscissenachse. Für eine zu: $L = 0$ parallele Transversale: $L_2 = 0$ durch den Punkt: $(x_2\, y_2)$ wird bestehen:

$$\varrho_1'' \varrho_2'' \varrho_3'' = -\frac{x_2 y_2^2 - 2a y_2^2 + k^2 x_2}{\cos\varphi \sin^2\varphi}.$$

und

$$\frac{\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}{\varrho_1'' \varrho_2'' \varrho_3''} = \frac{x_1 y_1^2 - 2a y_1^2 + k^2 x_1}{x_2 y_2^2 - 2a y_2^2 + k^2 x_2}.$$

führt zu dem Satze:

Das Verhältniss der Producte der drei Abschnitte ist für zwei parallele Strahlen durch die Punkte: $(x_1\, y_1)$ und $(x_2\, y_2)$ unabhängig von der Richtung derselben d. h. constant.

Liegen die beiden Punkte speciell in den Coordinatenachsen, so verhalten sich die Producte wie die zugehörigen Abscissen, wenn: $(x_1\, y_1)$ und $(x_2\, y_2)$ Punkte der X-Achse sind, und wie die Quadrate der entsprechenden Ordinaten, falls für beide Punkte: $x_1 = x_2 = 0$ ist. Für $k^2 = -2a$ haben wir noch den Satz:

Zieht man durch zwei feste Punkte, von denen der erste in der Y-, der zweite in der X-Achse liegt, parallele Strahlen, so verhalten sich die Producte der Abschnitte wie das Quadrat der Ordinate des Punktes auf der Y-Achse zu der Abscisse des Punktes auf der X-Achse.

§. 5 Pole und Polaren der Derivationscurve.

1) Man kann die Durchmesser einer Curve n^{ter} Ordnung als Polare von unendlich fernen Punkten auffassen. Rücken diese Punkte aus dem Unendlichen in die Endlichkeit, so wird aus dem parallelen Strahlensystem ein Strahlenbüschel. Ist das Centrum: (y) dieses Büschels, in homogenen Coordinaten gegeben durch: $(y_1 y_2 y_3)$, so kann man, analog wie beim Durchmesser, auf jedem Strahle des Büschels, zu den n Schnittpunkten: (x) des Strahles mit der Curve n^{ter} Ordnung, nach einem Punkte (z) resp. $(z_1 z_2 z_3)$ suchen, für welchen die Summe der Werthe der Abstandsverhältnisse der n Schnittpunkte: (x) von den beiden Punkten: (y) und (z) verschwindet. Bezeichet $(x^{(h)})$ irgend einen der n Schnittpunkte: (x), so wird der Punkt: (z), für welchen die Relation besteht:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\overline{x\ z}^{(h)}}{\overline{x\ y}^{(h)}} = 0$$

das harmonische Centrum ersten Grades für die n Durchschnittspunkte, in Bezug auf den Punkt: (y) genannt. $\overline{x\ z}^{(h)}$ und $\overline{x\ y}^{(h)}$ bezeichnen die algebraischen Entfernungen des Punktes: $(x^{(h)})$ von: (z) resp. (y).

Sei hier die Bemerkung gestattet dass die Bedingung:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\overline{x\ z}^{(h)}}{\overline{x\ y}^{(h)}} = 0$$

bei gleichem unendlichen Nenner übergeht in:

$$\sum_{h=1}^{n} \overline{x\ z}^{(h)} = 0.$$

welche Relation bei der Bestimmung des Centrums der mittleren Entfernungen beim Durchmesser massgebend war.

Bestimmt man auf jedem Strahle des Strahlenbüschels: (y) das harmonische Centrum, so kann man nach dem geometrischen Ort derselben fragen. Man nennt diesen Ort die $(n-1)^{te}$ Polare des Poles: (y); sie ist von der ersten Ordnung, und wird desshalb auch wohl die gerade Polare genannt.

Analog lässt sich auf jedem Strahle ein Punkt bestimmen, für welchen die Summe der Combinationen zur zweiten Klasse aus den n Abstandsverhältnissen: $\frac{\overline{x\ z}^{(h)}}{\overline{x\ y}^{(h)}}$ verschwindet, für welchen:

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\overline{x\ z}^{(h)}}{\overline{x\ y}^{(h)}}\right)_2 = 0$$

ist. Man nennt diesen Punkt das harmonische Centrum zweiten Grades, und den geometrischen Ort derselben auf den Strahlen des Büschels: (y), die $(n-2)^{te}$ oder conische Polare in Bezug auf den Pol: (y).

Die Definition der $(n-r)^{ten}$ Polare ist hiernach klar, sie ist der Ort der Centren r^{ten} Grades auf den Strahlen des Büschels durch: (y). Die Centren selbst werden bestimmt durch die Bedingung:

$$\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{\overline{x\ z}^{(h)}}{\overline{x\ y}^{(h)}}\right)_r = 0$$

Es muss also für das Centrum r^{ten} Grades die Summe der Combinationen zur r^{ten} Klasse aus den n Abstandsverhältnissen verschwinden.

2) Bedeuten: $x_i = y_i + \lambda z_i$ für $i = 1, 2, 3$ die Coordinaten eines Punktes: (x) der Verbindungslinie von (y) und (z), so ist λ proportional dem Verhältniss der Abschnitte, in welche (x) die Strecke yz theilt, es ist:

$$(36) \quad \ldots \quad \lambda = k \cdot \frac{xy}{xz}$$

worin k zwar eine willkürliche Constante bezeichnet, die jedoch bei allen x denselben Werth haben darf*). Soll nun der Punkt: (x_i) auf einer Curve n^{ter} Ordnung liegen, welche in der homogenen Form:

$$(37) \quad \ldots \quad u_x = u(x_1 x_2 x_3) = 0$$

vorliegt, so muss:

$$(37^a) \quad \ldots \quad u_x = u(y_1 + \lambda z_1,\ y_2 + \lambda z_2,\ y_3 + \lambda z_3) = 0$$

sein. Wendet man auf die letztere Function die Taylor'sche Reihenentwickelung an und führt die symbolische Bezeichnung ein:

$$\Delta_z(u_y) = \frac{\partial u}{\partial y_1} z_1 + \frac{\partial u}{\partial y_2} z_2 + \frac{\partial u}{\partial y_3} z_3 = \Sigma z_i \frac{\partial u}{\partial y_i}$$

$$\Delta^2{}_z(u_y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y_1{}^2} z_1{}^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2} z_2{}^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y_3{}^2} z_3{}^2$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} z_1 z_2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y_2 \partial y_3} z_2 z_3 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y_3 \partial y_1} z_3 z_1$$

$$= \Sigma\Sigma z_h z_i \frac{\partial^2 u}{\partial y_h \partial y_i}$$

$$\Delta^3{}_z(u_y) = \Sigma\Sigma\Sigma z_h z_i z_k \frac{\partial^3 u}{\partial y_h \partial y_i \partial y_k} \text{ etc. etc.}$$

wobei den Indices h, i, k etc. die Werthe 1, 2, 3 beizulegen sind, so wird dieselbe sich darstellen unter der Form:

$$(38) \ldots \begin{cases} u_y + \Delta_z(u_y) \cdot \lambda + \Delta^2{}_z(u_y) \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + \Delta^3{}_z(u_y) \cdot \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots . \\ + \ldots + \Delta^n{}_z(u_y) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = 0 \end{cases}$$

oder indem man mit λ^n dividirt,

$$(38^a) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{u_y}{\lambda^n} + \frac{\Delta_z(u_y)}{\lambda^{n-1}} + \frac{\Delta^2{}_z(u_y)}{2!\,\lambda^{n-2}} + \frac{\Delta^3{}_z(u_y)}{3!\,\lambda^{n-3}} + \ldots . \\ + \ldots . + \frac{\Delta^n{}_z(u_y)}{n!} = 0 \end{cases}$$

Aus der Form dieser Gleichung gehen nun die Gleichungen der Polaren hervor. Die n Wurzeln λ von (38) gehören den n

*) Durège: Art. 19 u. 169.

Schnittpunkten: (x) der Transversalen yz mit der Curve an. Habe nun das λ, welches dem Punkte: $(x^{(h)})$ entspricht den Werth: $\lambda^{(h)}$, so ist nach (36):

$$\frac{\overline{\overset{(h)}{x\ z}}}{\overline{\underset{(h)}{x\ y}}} = \frac{k}{\lambda^{(h)}}$$

und das harmonische Centrum ersten Grades: (z) in Bezug auf: (y) für die n Durchschnittspunkte: (x) wird durch

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\overline{\overset{(h)}{x\ z}}}{\overline{\underset{(h)}{x\ y}}} = \sum_{h=1}^{n} \frac{k}{\lambda^{(h)}} = 0 \text{ oder durch}$$

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{(h)}} = 0$$

angegeben. Es sind aber die n Wurzeln von $\frac{1}{\lambda^{(h)}}$, Wurzeln der Gleichung (38ª); es müssen demnach die Coordinaten des harmonischen Centrums: (z) der Gleichung

(39) . . . . . $\Delta_z(u_y) = 0$

genügen. Liegt jetzt der Punkt: (y) fest und variirt: (z) auf den Strahlen des Büschels durch: (y), so stellt die vorige Gleichung, die $(n-1)^{te}$ Polare des Punktes: (y) dar. Die $(n-2)^{te}$ Polare wird bei variabelem z analog durch:

$$\Delta_z^2(u_y) = 0$$

angegeben.

3) Betrachten wir die Polaren unserer Derivationscurve.

Sind $(z_1 z_2 z_3)$ die homogenen Coordinaten des harmonischen Centrums, so lauten die Gleichungen der geraden und conischen Polare für den Pol $(y_1 y_2 y_3)$:

(40ª) . $(y_2^2 + k^2 y_3^2)z_1 + 2y_2(y_1 - 2ay_3)z_2 + 2(k^2 y_1 y_3 - ay_2^2)z_3 = 0$

(40ᵇ) $(y_1 - 2ay_3)z_2^2 + k^2 y_1 z_3^2 + 2y_2 z_1 z_2 - 4ay_2 z_2 z_3 + 2k^2 y_3 z_3 z_1 = 0$

Geht man mittelst der Substitutionen:

$$\xi = \frac{y_1}{y_3}, \eta = \frac{y_2}{y_3}, x = \frac{z_1}{z_3}, y = \frac{z_2}{z_3}$$

zu Cartesischen Coordinaten über, so nehmen obige Gleichungen die Gestalt an:

$$(41^a) \ldots\ldots (\eta^2 + k^2)\, x + 2\eta\,(\xi - 2a)\, y + 2\,(k^2\,\xi - a\eta^2) = 0$$
$$(41^b) \ldots\ldots 2\eta\, xy + (\xi - 2a)\, y^2 + 2k^2\, x - 4a\eta\, y + k^2\,\xi = 0$$

Nach (41^a) schliesst die gerade Polare mit der X-Achse, einen Winkel ein, dessen Tangente gleich ist:

$$\frac{k^2 + \eta^2}{2\eta\,(2a - \xi)}$$

und schneidet die Ordinatenachse in der Entfernung:

$$\frac{a\eta^2 - k^2\xi}{\eta\,(\xi - 2a)}$$

vom Coordinatenanfang.

Die gerade Polare für den Coordinatenanfang als Pol, ist die Y-Achse. Bewegt sich der Pol auf der X-Achse, so läuft die gerade Polare der Ordinatenachse parallel. Die Gleichung derselben ist: $x = -2\xi$.

Für jeden Punkt der Asymptote der Derivationscurve als Pol ist die zugehörige gerade Polare eine Parallele zur Ordinatenachse, welche mit der Y-Achse zusammen fällt, wenn der Pol auf der Asymptote die Ordinate hat:

$$\eta = \pm k\sqrt{2}.$$

Verlegt man den Pol: $\xi\eta$ auf die Derivationscurve selbst d. h. substituirt man in die Gleichung der geraden Polare:

$$(41^a) \ldots\ldots \eta^2\,(x - 2a) + 2y\xi\eta + 2k^2\,\xi - 4a\,y\eta + k^2 x = 0$$

$$\eta = \frac{k\xi}{\sqrt{2a\xi - \xi^2}}$$

so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$(42) \ldots\ldots y\,(2a\xi - \xi^2)^2 = ak\left(x\xi + \xi^2 - \frac{\xi^3}{a}\right)\sqrt{2a\,\xi - \xi^2}\,.$$

Die Vergleichung von (42) mit (21^a) lässt den Satz erkennen:

Für einen Punkt der Derivationscurve als Pol, ist die gerade Polare Tangente an diesem Punkte.

Die conische Polare der Derivationscurve, deren Gleichung durch (41^b) angegeben wird, ist eine Hyperbel, deren Mittelpunktcoordinaten

$$\sigma = 2a + \frac{k^2}{\eta^2}(\xi - 2a); \quad \tau = -\frac{k^2}{\eta}$$

sind, und deren Halbachsen die Werthe haben:

$$A = \frac{k\sqrt{2}}{\eta}\sqrt{\frac{(\xi-2a)k^2 + \xi\eta^2 + 4a\eta^2}{(2a-\xi) - \sqrt{4\eta^2 + (\xi-2a)^2}}}$$

$$B = \frac{k\sqrt{2}}{\eta}\sqrt{\frac{(\xi-2a)k^2 + \xi\eta^2 + 4a\eta^2}{(2a-\xi) + \sqrt{4\eta^2 + (\xi-2a)^2}}}$$

Einige specielle Fälle mögen hier noch Berücksichtigung finden. Wird der Pol: $\xi\eta$ in den Coordinatenanfang verlegt, so ist die conische Polare eine Parabel:

$$x^2 = \frac{k^2}{a}x$$

welche die Ordinatenachse zur Scheiteltangente hat, und deren Parameter gleich ist:

$$\frac{k^2}{a}.$$

Bewegt sich der Pol auf der Y-Achse, so bleibt die conische Polare eine Hyperbel, welche, wenn die Ordinate des Poles:

$$\eta = \pm\frac{k}{\sqrt{2}}$$

ist, in zwei sich schneidende Gerade degenerirt.

Läuft der Pol auf der X-Achse, so ist die conische Polare eine Parabel

$$y^2 = \frac{2k^2x}{2a-\xi} + \frac{k^2\xi}{2a-\xi}$$

welche für $\xi = 2a$, in die doppelte Gerade: $x = -a$ übergeht.

Im allgemeinen ist die conische Polare, wie gezeigt wurde,

eine Hyperbel mit der Gleichung: (41^b). Dieser Hyperbel degenerirt aber für:

$$(43) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2a-\xi)k^2-\xi\eta^2-4a\eta^2=0$$

in zwei sich schneidende Gerade.

Bei variabelem: $\xi\eta$ stellt obige Bedingungsgleichung eine Curve dritter Ordnung dar, welche die Eigenschaft besitzt, dass für ihre sämmtliche Punkte, als Pole betrachtet, die conische Polare der Derivationscurve zerfällt. Vergleicht man aber die Gleichung dieser fraglichen Curve mit (4), so findet man, dass die Curve 3ter Ordnung keine andere ist, als unsere Hessische-Curve, für welche mithin der Satz gilt:

Für Punkte der Hessischen-Curve als Pole betrachtet, zerfällt die conische Polare in zwei sich schneidende Gerade.

Bestimmt man die Durchschnittspunkte der conischen Polare mit der Derivationscurve, so findet man die Eliminationsgleichungen: (12^a) und (12^b), woraus folgt:

Die conische Polare schneidet die Derivationscurve in den Berührungspunkten der Tangenten, die sich vom Pole: $\xi\eta$ an die Derivationscurve ziehen lassen.

4) Aus den Gleichungen der geraden und conischen Polare:

$$(41^a) \quad (y_2^2+k^2y_3^2)z_1+2y_2(y_1-2ay_3)z_2+2(k^2y_1y_3-ay_2^2)z_3=0$$

$$(41^b) \quad (z_2^2+k^2z_3^2)y_1+2z_2(z_1-2az_3)y_2+2(k^2z_1z_3-az_2^2)y_3=0$$

geht unmittelbar hervor:

α) Die Gleichung der geraden Polare für den Pol: (y) resp. (z), ist die Gleichung der conischen Polare für den Pol: (z) resp. (y).

β) Liegt in der geraden Polare des Poles: (y) der Punkt: (z), so geht die conische Polare des Poles: (z) durch (y).

Liegt ein Strahlenbüschel mit dem Centrum: (x) vor, und betrachtet man sämmtliche Strahlen dieses Büschels als gerade Polaren in Bezug auf die Derivationscurve, so wird für die variabelen Pole dieser Strahlen die Relation bestehen:

$$(y_2^2 + k^2 y_3^2)\, x_1 + 2y_2 (y_1 - 2ay_3)\, x_2 + 2\,(k^2 y_1 y_3 - a y_2^2)\, x_3 = 0$$

aus welcher in Uebereinstimmung mit (41^b) sich ergiebt:

α) Dreht man die Gerade Polare der Derivationscurve um einen ihrer Punkte: (x) und bestimmt zu jedem Strahle des so entstehenden Strahlenbüschels den entstrechenden Pol in Bezug auf die Derivationscurve, so ist der geometrische Ort dieser Pole die conische Polare für den Pol: (x).

β) Durchläuft ein Punkt die conische Polare und bestimmt man zu jeder Lage dieses Punktes, als Pol, die gerade Polare der Derivationscurve, so drehen sich dieselben um einen Punkt, den Pol der conischen Polare.

Wird für die conischen Polaren der Derivationscurve, die durch einen festen Punkt: (x) gehen, der Pol: (y) construirt, so wird der Ort dieser variabeln Pole durch die Gleichung angegeben:

$$(y_1 - 2ay_3)\, x_2^2 + k^2 y_1 x_3^2 + 2y_2 x_1 x_2 - 4a y_2 x_2 x_3 + 2k^2 y_3 x_3 x_1 = 0$$

woraus hervorgeht:

Der geometrische Ort der Pole der conischen Polaren der Derivationscurve, die durch einen festen Punkt hindurchgehen, ist die gerade Polare der Derivationscurve für den festen Punkt als Pol. Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch und lautet:

Lässt man einen Punkt die gerade Polare der Derivationscurve durchlaufen und construirt man zu jeder Lage dieses Punktes, als Pol betrachtet, die conische Polare, so gehen dieselben alle durch einen Punkt, den Pol der geraden Polare.

5) Bestimmt man zu der conischen Polare des Poles: (y) mit der Gleichung

$$(z^2 + k^2 z^2_3)\, y_1 + 2z_2 (z_1 - 2az_3)\, y_2 + 2\,(k^2 z_1 z_3 - a z_2^2)\, y_3 = 0$$

die Polare des Punktes: (y) in Bezug auf den Polarkegelschnitt selbst, so wird die Gleichung derselben sein:

$$(44) \ldots\ldots (z_2 y_2 + k^2 z_3 y_3)\, y_1 + z^2 (y_1 - 2ay_3)\, y_2 + y_2 (z_1 - 2az_3)\, y_2 + (k^2 z_1 y_3 - a z_2 y_2)\, y_3 + (k^2 y_1 z_3 - a y_2 z_2)\, y_3 = 0$$

$$(y_2^2 + k^2 y_3^2)\, z_1 + 2y_2 (y_1 - 2ay_3)\, z_2 + 2\,(k^2 y_1 y_3 - a y_2^2)\, z_3 = 0$$

Es ist mithin die Polare der conischen Polare für den Punkt: (y), zugleich auch die gerade Polare der Derivationscurve für denselben Punkt. Werden durch:

$$(45).\ A=(z_2^2+k^2z_3^2)u_1+2z_2(z_1-2az_3)u_2+2(k^2z_1z_3-az_2^2)u_3=0$$
$$B=(z_2^2+k^2z_3^2)v_1+2z_2(z_1-2az_3)v_2+2(k^2z_1z_3-az_2^2)v_3=0$$

die conischen Polaren für die Pole: (u) und (v) angegeben, und berechnet man zu der conischen Polare: $A=0$ die Polare des Punktes: (v) und für: $B=0$ die Polare des Punktes: (u), so entsprechen beide Polaren der Gleichung:

$$(46)\ \ldots\ (z_2v_2+k^2z_3v_3)u_1+z_2(v_1-2av_3)u_2+v_2(z_1-2az_3)u_2$$
$$+(k^2z_1v_3-az_2v_2)u_3+(k^2v_1z_3-av_2z_2)u_3=0$$

Die Polaren fallen zusammen.

Zieht man demnach von dem Punkte: (u) Tangenten an die conische Polare des Poles: (v) und von: (v) Tangenten an die conische Polare des Punktes: (u), so liegen diese vier Berührungspunkte in einer Geraden.

Wir haben gesehen, dass für einen Punkt: (x) der Derivationscurve, die gerade Polare Tangente an dem Punkt ist. Für jeden Punkt dieser Tangente, als Pol betrachtet, wird nun, wie gezeigt wurde, die conische Polare der Derivationscurve durch: (x) gehen. Bestimmt man aber, indem man: (x) als Pol betrachtet, die Polare der zugehörigen conischen Polare, so wird diese, nach oben, mit der geraden Polare der Derivationscurve zusammenfallen. Für den Punkt: (x) haben also die Derivationscurve und die conische Polare die Tangente gemeinsam.

Hieraus folgt:

Die conische Polare der Derivationscurve für einen ihrer Punkte, berührt die Derivationscurve in diesem Punkte; ihre gemeinsame Tangente ist die gerade Polare des Berührungspunktes.

Substituiren wir in die Gleichungen der geraden und conischen Polare:

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \cos\varphi; \qquad \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \sin\varphi$$

so gehen nach der Division mit $(\xi^2+\eta^2)$ resp. $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, (41ª) und (41ᵇ) über in:

$$2y\sin\varphi\cos\varphi - \frac{4a\,y\sin\varphi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + \frac{k^2 x}{\xi^2+\eta^2} + x\sin^2\varphi + 2\frac{k^2\cos\varphi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} - 2a\sin^2\varphi = 0$$

$$2xy\sin\varphi + y^2\cos\varphi - \frac{2ay^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + \frac{2k^2 x}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} - 4a\,y\sin\varphi + k^2\cos\varphi = 0$$

Rückt nun der Pol: $\xi\ \eta$ in unendliche Ferne, d. h. wird $\sqrt{\xi^2+\eta^2} = \infty$, so werden obige Gleichungen mit (31) und (33) identisch.

Für den unendlich fernen Pol ist also die Polare irgend welcher Ordnung identisch mit dem Durchmesser derselben Ordnung.

6) Bevor wird dieses Capitel über »Pole und Polaren« schliessen, wollen wir noch kurz einer Enveloppe Erwähnung thun.

Läuft der Pol: (x) auf der Geraden:

(47) . . . . . $L = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$

und bestimmt man für jede Lage desselben die gerade Polare der Derivationscurve, so hüllen dieselben eine Curve zweiter Ordnung ein, die nach Cremona die Poloconik der Geraden L, nach Salmon die conische Polare der Geraden genannt wird. Die Gleichung dieser Enveloppe wird nach Durège durch eine Determinante vierten Grades angegeben, welche die Form hat.

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ b_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ b_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

u_{ik} bezeichnet hierin allgemein: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$.

Für unsere Derivationscurve:

$$x_1 x_2^2 - 2a x_2^2 x_3 + k^2 x_1 x_3^2 = 0$$

wird die Gleichung der Poloconik lauten:

$$(48) \quad \ldots\ldots - k^2 b_1^2 x_1^2 + x_2^2 (4a b_1 b_3 + b_3^2 + 4a^2 b_1^2) + x_3^2 (k^4 b_2^2 - 4a k^2 b_1 b_3) + 2x_1 x_3 (k^2 b_1 b_3 + a k^2 b_1^2) + 2x_2 x_3 (2a k^2 b_1 b_2 - k^2 b_2 b_3) + 2k^2 b_1 b_2 x_1 x_2 = 0$$

Wir führen Cartesische Coordinaten ein durch:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$-\frac{b_1}{b_3} = \frac{1}{\alpha} \qquad -\frac{b_2}{b_3} = \frac{1}{\beta}$$

und erhalten die Gleichung der Poloconik der Geraden:

$$(47^a) \quad \ldots\ldots L = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

in der Gestalt:

$$(48^a) \quad \ldots\ldots k^2 \beta^2 x^2 - 2k^2 \alpha\beta xy - \beta^2 (\alpha - 2a)^2 y^2 + 2k^2 \beta^2 (\alpha - a) x - 2k^2 \alpha\beta (2a + \alpha) y - k^2 \alpha (\alpha k^2 + 4a\beta^2) = 0.$$

Die Poloconik ist demnach eine Hyperbel, deren Mittelpunktcoordinaten angegeben werden durch:

$$\xi = -\frac{k^2 \alpha^2 (2a + \alpha) + \beta^2 (\alpha - 2a)^2 (\alpha - a)}{\beta^2 (\alpha - 2a)^2 + k^2 \alpha^2}$$

$$\eta = \frac{-3a k^2 \alpha\beta}{\beta^2 (\alpha - 2a)^2 + k^2 \alpha^2}.$$

Man kann die Poloconik noch auf folgende Weise definiren.

Bestimmt man für jeden Punkt: (x) der Geraden: $L = 0$ die conische Polare in Bezug auf die Derivationscurve, und die Polare jeder zugehörigen conischen Polare, so ist die Enveloppe der letzteren Geraden die Poloconik.

Nach oben ist nämlich die Polare von: (x) bezüglich der conischen Polare, die gerade Polare von: (x) in Bezug auf die Derivationscurve.

Ist die Gerade: $L=0$ Tangente der Derivationscurve, so fällt die gerade Polare des Berührungspunktes mit ihr zusammen, woraus hervorgeht, dass die Tangente der Derivationscurve die Poloconik im Berührungspunkte tangirt; die Tangente ist gemeinsame Tangente der Derivationscurve und der Poloconik.

Wird die Gerade: $L=0$ um einen ihrer Punkte gedreht, so gehört zu jeder Geraden, ein System von Geraden, die eine Poloconik einhüllen. Alle diese Systeme werden aber eine Gerade, nämlich die gerade Polare des Poles: (x) in Bezug auf die Derivationscurve gemeinsam haben, woraus folgt:

Construirt man zu sämmtlichen Strahlen eines Strahlenbüschels mit dem Centrum: (x) die Poloconiken, so haben diese eine Tangente gemeinsam, nämlich die gerade Polare des Centrums in Bezug auf die Derivationscurve.

§ 6. Die Quadratur der Derivationscurve.

1) Die Berechnung des Inhaltes des Flächenstückes, welches begrenzt wird von der Derivationscurve, von ihrer Asymptote und der X-Achse, wird darauf hinaus kommen, den Werth des Integrals

$$(49) \quad \ldots\ldots \int \frac{kx}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx$$

für die Grenzen 0 und $2a$ anzugeben,

Da nun:

$$(49^a)\ldots k\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = -k\sqrt{2ax-x^2} + ak\int \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx$$

ist, und auf das letztere Integral die Reductionsformel Anwendung findet:

$$(50)\ldots\ldots \int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\,arc\,sin\,\frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}$$

welche für $c<0$ besteht, so wird

$$k\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = -k\sqrt{2ax-x^2} - a\,k\,arc\,sin\,\frac{a-x}{a}$$

sein.

Wird dieses Integral nun zwischen den Grenzen $x = 2a$ und $x = 0$ genommen, so kommt:

$$k\int_0^{2a} \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = -\,ak\,arc\,sin\,(-1) + ak\,arc\,sin\,(+1).$$

Es gehört aber zu $arc\,sin\,(-1)$ beim Radius: 1, der Winkel: (-90^0) und zu $arc\,sin\,(+1)$ der Winkel: $(+90^0)$, folglich ist:

$$(49^b) \quad \ldots\ldots\ k\int_0^{2a} \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx = a\,k\,\pi.$$

Das Flächenstück zwischen der Derivationscurve, der Asymptote und der X-Achse ist mithin an Inhalt gleich der Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und k.

Für $k = a$ ist das angegebene Flächenstück gleich dem Flächeninhalt des Kreises, der beim Erzeugen der Cycloide auf der Y-Achse rollte

2) Die Gleichung der Cycloide wird nach: (2^a) durch:

$$y = a\,arc\,cos\,\frac{x-a}{a} + \sqrt{2ax-x^2}$$

angegeben.

Mit Hilfe der Reductionsformeln:

$$(51)\ldots \begin{cases} \int arc\,cos\,x\,dx = x\,.\,arc\,cos\,x - \sqrt{1-x^2} \\ \int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2} \\ \qquad + \left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2c}\right)\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx \end{cases}$$

und der oben angegebenen Formel (50), geht das Integral von $y\,.\,dx$ über in:

$$\int y\,dx = a\int arc\,cos\,\frac{x-a}{a}\,dx + \int \sqrt{2ax-x^2}\,.\,dx$$

$$= a\left(\sqrt{2ax-x^2} + (x-a)\,arc\,cos\,\frac{x-a}{a}\right)$$

$$+ \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} - \frac{a^2}{2}\,arc\,sin\,\frac{a-x}{a}$$

Zur Berechnung des Flächenstückes, welches begrenzt wird vom Cycloidenbogen, der Y- und der X-Achse, integriren wir zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=2a$; das Ergebniss wird sein:

$$(52)\ \ldots\ldots \int_0^{2a} y\,dx = a^2\,arc\,cos\,(+1) - \frac{a^2}{2}\,arc\,sin\,(-1)$$

$$+ a^2\,arc\,cos\,(-1) + \frac{a^2}{2}\,arc\,sin\,(+1)$$

Beachtet man nun, dass:

$$arc\,cos\,(+1) = 0,\ arc\,cos\,(-1) = \pi.$$

ist, so wird das Flächenstück, begrenzt von dem Cycloidenbogen, der X- und Y-Achse durch $\frac{3}{2}a^2\pi$ angegeben.

Es ist hieraus ersichtlich, dass die Fläche zwischen einer Cycloide und der Y-Achse, dreimal so gross ist, als die Fläche des rollenden Kreises.

Vergleicht man die Fläche zwischen einem Cycloidenbogen und der Y-Achse, mit der Fläche begrenzt von der Derivationscurve und ihrer Asymptote, mit der Fläche des rollenden Kreises, so besteht die Relation:

$$C : D : K = 3a : 2k : a$$

woraus folgt:

α) Die Flächen der Derivationscurve und der Cycloide werden gleich für: $k = \frac{3a}{2}$

β) Die Flächen der Derivationscurve und des Kreises sind an Inhalt gleich, wenn $k = \frac{a}{2}$ ist.

γ) Für $k = a$ verhalten sich die Flächen des Kreises, zur Derivationscurve, zur Cycloide wie eins zu zwei zu drei, d. h. die Fläche der Derivationscurve ist doppelt so gross wie die Kreisfläche, und $\frac{2}{3}$ der Cycloidenfläche.

3) Die Hessische-Curve, welche bei der Bestimmung der Beugungspunkte der Derivationscurve benutzt wurde, hat nach Gleichung (4) die Gestalt.

(4) . . . . . $xy^2 + 4ay^2 + k^2x - 2ak^2 = 0.$

Die Curve liegt symmetrisch zur X-Achse, hat die Gerade: $x = 2a$ zur Scheiteltangente und die Gerade: $x = -4a$ zur Asymptote. Sie besitzt keine Doppelpunkte, hat aber zwei Beugungspunkte, mit denselben Coordinaten:

$$x = \frac{a}{2}; \quad y = \pm \frac{k}{\sqrt{3}}$$

wie die Beugungspunkte der Derivationscurve, woraus hervorgeht, dass sich die Derivationscurve und ihre Hessische-Curve in Punkten schneiden, die für beide Curven Beugungspunkte sind. Die Hessische-Curve liegt zwischen den Abcissen: $x = 2a$ und $x = \frac{a}{2}$ concav zur X-Achse, und kehrt in ihrem weiteren Verlauf der Abscissenachse die convexe Seite zu. (Fig. VI.).

Die Fläche dieser Hessischen-Curve, begrenzt von der Curve und der Asymptote: $x = -4a$, steht in einfacher Beziehung zu der Fläche der Derivationscurve. Die Gleichung der Hessischen-Curve lässt sich auf die Form bringen:

$$y^2 = k^2 \frac{2a - x}{4a + x}$$

Zur Berechnung des Integrals:

$$\int y\,dx = k \int \sqrt{\frac{2a - x}{4a + x}}\,dx = k \int \frac{2a - x}{\sqrt{(4a + x)(2a - x)}}\,.\,dx$$

setze man:

$$(54) \ldots \int \frac{2a-x}{\sqrt{8a^2-2ax-x^2}}\,dx = \alpha_0 \sqrt{8a^2-2ax-x^2} + \beta \int \frac{1}{\sqrt{8a^2-2ax-x^2}}\,.\,dx\,.$$

worin α_0 und β noch unbestimmte Coefficienten sind. Zu dieser identischen Gleichung werden wir durch die Thatsache berechtigt, dass auf beiden Seiten der Form nach völlig gleiche Ausdrücke entstehen, wenn wir wieder differentiiren. Man erhält dann:

$$\frac{2a-x}{\sqrt{8a^2-2ax-x^2}} = \frac{-\alpha_0(a+x)+\beta}{\sqrt{8a^2-2ax-x^2}}$$

Der Satz von den unbestimmten Coefficienten führt zu den Werthen von α_0 und β. Es ist:

$$\alpha_0 = 1,\ \beta = 3a$$

Werden diese Werthe eingetragen, so kommt:

$$(55) \ldots \ldots k \int \frac{2a-x}{\sqrt{8a^2-2ax-x^2}}\,dx = k\sqrt{8a^2-2ax-x^2} + 3ak \int \frac{1}{\sqrt{8a^2-2ax-x^2}}\,dx.$$

Wird auf das letzte Integral, die uns schon bekannte Reductionsformel:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\, arc\, sin\, \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}$$

angewendet, so finden wir:

$$\int y\,dx = k\sqrt{8a^2-2ax-x^2} - 3ak\, arc\, sin\, \frac{-(a+x)}{3a}$$

Zur Berechnung der Fläche begrenzt von der Hessischen-

Curve, ihrer Asymptote und der X-Achse nehmen wir das Integral für die Grenzen: $x = -4a$ und $x = 2a$. Für diese Grenzen wird:

$$(56) \quad \ldots\ldots \int_{-4a}^{2a} y\,dx = -3ak\,arc\,sin\,(-1) + 3ak\,arc\,sin\,(+1)$$
$$= 3ak\pi.$$

Die Fläche der Hessischen-Curve ist mithin drei mal so gross als die Fläche der Derivationscurve.

Stellt man einen Vergleich an zwischen den Flächen des Kreises, der Derivationscurve, der Cycloide und der Hessischen-Curve, so werden die Inhaltsverhältnisse angegeben durch:

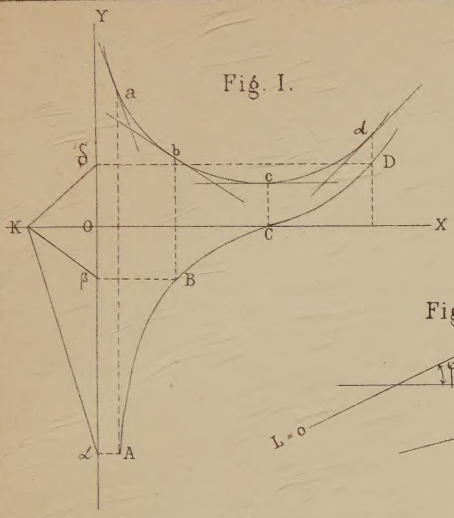
$$(57) \quad \ldots\ldots : K:D:C:H := a:2k:3a:6k.$$

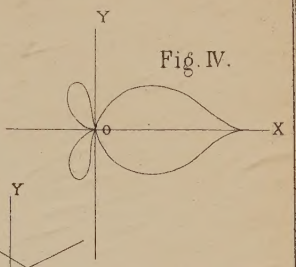
Ist k speciell gleich a, so verhält sich:

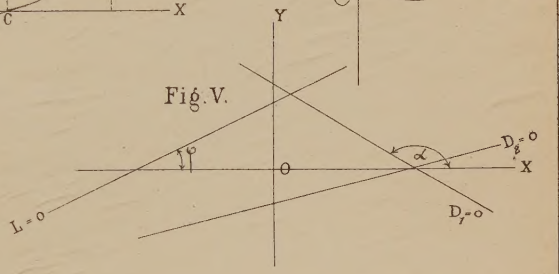
$$K:D:C:H = 1:2:3:6.$$

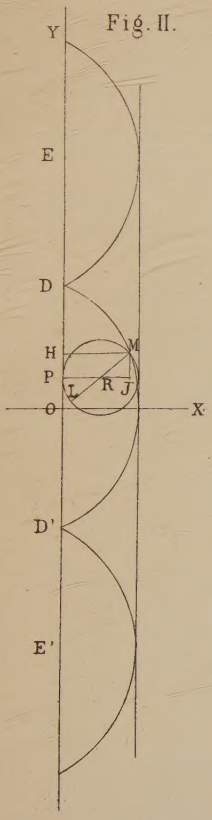
Lebenslauf.

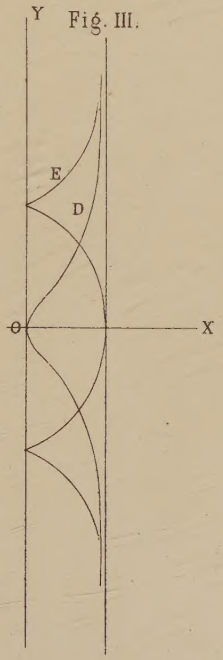
Ich wurde am 20. October 1859 zu Ruhrort am Rhein geboren. Mit dem 10. Jahre wurde ich Schüler der vormaligen Realschule I. O. meiner Vaterstadt, welche Anstalt ich Ostern 1879 mit dem Zeugniss der Reife verliess. An den Universitäten zu Giessen, Berlin und Marburg widmete ich mich dem Studium der Mathematik, Physik und des Französischen und bestand an letzterer Universität am 2. Februar 1883 die Prüfung für die Candidaten des höheren Schulamts. Von April 1883 bis 1884 erfüllte ich in Cleve meine Dienstpflicht. Zur Ableistung des Probejahrs, durch Verfügung des Provinzial-Schulcollegiums zu Coblenz, vom 22. Februar 1884, dem Realgymnasium zu Elberfeld überwiesen, bin ich seit dieser Zeit an der erwähnten Anstalt thätig.

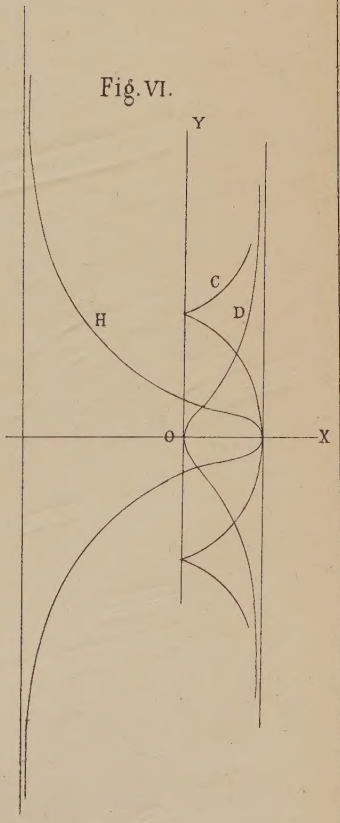












Figur IV u. V vergrössert.